**Tema 2** **Aproximación de funciones por polinomios**

**Interpolación de Lagrange y de Newton**

1. Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

   *a*) Hallar el polinomio interpolador de Lagrange cuadrático $P(x)$ de $f(x)$ con nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$.

   *b*) Hallar $f(1/4) - P(1/4)$.

2. Dados los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, ..., $x_{1999} = 1999$, $x_{2000} = 2000$ ¿cuál es el polinomio interpolador de la función $f(x) = x^{1000} + 179x^{13}$?

3. A partir de los datos $\ln 9 = 2.1972$, $\ln 9.5 = 2.2513$ y $\ln 10 = 2.3026$, aproximar $\ln 9.2$ mediante interpolación lineal y cuadrática. En ambos casos, acotar el error cometido y comparar los resultados obtenidos con la solución exacta a cuatro cifras decimales, $\ln 9.2 = 2.2192$.

4. **Expresión del error $E_2(x)$ cuando los nodos de interpolación están equiespaciados.**
   Sean $x_0$, $x_1$ y $x_2$ tres números reales distintos con $x_{i+1} - x_i = h > 0$, $i = 0, 1$, $f \in C^3[x_0, x_2]$ y $P_2(x)$ el polinomio interpolador de grado menor o igual que 2 con nodos $x_0$, $x_1$ y $x_2$. Demostrar que

$$|E_2(x)| = |f(x) - P_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}h^3}{27} \text{máx}\{|f^{(3)}(\alpha)| : \alpha \in [x_0, x_2]\} \qquad x \in [x_0, x_2]$$

5. Sea $f(x) = \cosh x$. Se pide:

   *a*) Calcular el polinomio cuadrático que interpola la función $f$ en el intervalo $[-1, 1]$ tomando como nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

   *b*) Aproximar $\cosh(0.5)$ y acotar el error de interpolación.

   *c*) Demostrar que para $x \in [-1, 1]$ se tiene la siguiente cota del error de interpolación $|E_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{27} \operatorname{senh}(1)$.

6. Sea $f(x)$ una función cuyos valores en $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ son, respectivamente, 2, 3 y 6.

   *a*) Hallar el polinomio interpolador de Lagrange con nodos $x_0$, $x_1$ y $x_2$.

   *b*) Hallar el polinomio interpolador de Newton con nodos $x_0$, $x_1$ y $x_2$.

   *c*) Verificar que los polinomios interpoladores construidos en (*a*) y (*b*) son iguales.

   *d*) ¿Cuál es el polinomio interpolador de $f$ con nodos $\{2, 3, 1\}$? Razonar la respuesta.

   *e*) ¿Qué relación existe entre las diferencias divididas $f[1, 2, 3]$ y $f[2, 3, 1]$? Razonar la respuesta.

7. Dados los siguientes datos:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 11 | 16 | $a$ |

   *a*) Determinar el polinomio $p(x)$ que interpole los cuatro primeros puntos de interpolación , $\{(-2, 1), (-1, 4), (0, 11), (1, 16)\}$, de la tabla.

   *b*) ¿Qué valor debe tener $a$ para que el polinomio que interpola los cinco puntos de interpolación coincida con el del apartado anterior?

8. Con los datos de la siguiente tabla de diferencias divididas escribir, cuando sea posible, los polinomios interpolantes de grado dos que pasan por los puntos:

   a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{0, 1, 3\}$ c) $\{0, 1, -1\}$ d) $\{1, 2, 3\}$ e) $\{-1, 0, 2\}$

| $x_i$ | $f[\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 4 | | | | |
| 0 | 3 | $-1$ | | | |
| 1 | 3 | 0 | $1/2$ | | |
| 3 | 1 | $-1$ | $-1/3$ | $-5/24$ | |
| 2 | 2 | $-1$ | 0 | $1/6$ | $1/8$ |

9. Se considera la siguiente tabla de datos correspondiente a la función $f(x) = e^x$:

| $x_i$ | 0 | 0.2 | 0.4 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 1 | 1.2214 | 1.4918 | 1.8221 |

   *a*) Escribir la tabla de diferencias divididas.
   *b*) Aproximar $\sqrt{e}$ utilizando interpolación lineal. Justificar, matemáticamente, qué nodos de interpolación se han escogido. Dar una cota del error absoluto cometido y comparar con el resultado exacto.
   *c*) Aproximar $\sqrt[3]{e}$ utilizando el polinomio de interpolación de grado 3. Dar una cota del error absoluto cometido.
   *d*) Aproximar $\sqrt[5]{e^4}$ utilizando el polinomio de interpolación de grado 3 y comparar con el resultado exacto. Razonar a qué es debido que el error absoluto en este caso sea tan grande cuando lo comparamos con la cota obtenida en el apartado anterior.

10. Sea $f(x) = 5^{x-1}$.

   *a*) Escribir la tabla de diferencias divididas correspondiente a $f(x)$ y los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 1$.
   *b*) Utilizando la tabla del apartado anterior, escribir el polinomio interpolador cúbico $P_3(x)$ de nodos $x_0 = -1$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 1$.
   *c*) Utilizar $P_3(x)$ para aproximar $5^{-0.25}$ y acotar el error de interpolación.
   *d*) Probar que para $x \in [-1, 1]$ se tiene la siguiente cota del error de interpolación:

$$|E_3(x)| = |f(x) - P_3(x)| \le \frac{2^4}{4!}(\ln 5)^4.$$

   *e*) Se interpola $f(x)$ con un polinomio de interpolación de grado 20 utilizando 21 nodos en $[-1, 1]$. Obtener una cota para $|E_{20}(x)| = |f(x) - P_{20}(x)|$ para $x \in [-1, 1]$.

**Aplicaciones**

11. Se quiere obtener una raíz de la ecuación $x^3 + f(x)e^{-x} = 0$, siendo $f(x)$ una función de la que solo se conoce la siguiente tabla de valores:

| $x$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $-1$ | $-1$ | $-9$ |

Para aproximar la raíz, se sustituye en la ecuación la función $f(x)$ por su polinomio interpolador en los nodos $-1$, 0, 1 y 2, $p(x)$. A continuación, se aproxima la raíz por la de $x^3 + p(x)e^{-x} = 0$.

   *a*) Obtener el polinomio interpolador, $p(x)$, en los nodos $-1$, 0, 1 y 2.

*b*) Comprobar que la ecuación $x^3 + p(x)e^{-x} = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$. Formular el método de la secante para aproximar la raíz y tomando como datos iniciales $p_0 = 0$ y $p_1 = 1$, calcular dos iteraciones.

12. **Interpolación inversa**. Supongamos que $f \in C^1[a,b]$, $f'(x) \neq 0$ en $[a,b]$ y que $f$ tiene un cero $p$ en $[a,b]$. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números distintos en $[a,b]$ con $f(x_k) = y_k$, $\quad k = 0, 1, \ldots, n$. Para aproximar $p$ se construye el polinomio interpolador de grado menor o igual que $n$ en los nodos $y_0, y_1, \ldots, y_n$ para $f^{-1}$. Puesto que $f(x_k) = y_k$ y $f(p) = 0$, se deduce que $f^{-1}(y_k) = x_k$ y $f^{-1}(0) = p$. Se da el nombre de *interpolación inversa* al uso de la interpolación para aproximar $f^{-1}(0)$.

    Utilizar la interpolación inversa para obtener una aproximación a la solución de $x = e^{-x}$, por medio de los datos

| $x$ | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|
| $e^{-x}$ | 0.7408 | 0.6703 | 0.6065 | 0.5488 |

13. La siguiente tabla muestra los valores $\nu$ , $(m^2 \cdot s^{-1})$, la viscosidad cinemática del agua en función de la temperatura $T$, $(°C)$.

| $T$ $(°C)$ | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu$ $(m^2 \cdot s^{-1})$ | 1.08 | 1.06 | 1.03 | 1.01 | 0.983 | 0.960 | 0.938 | 0.915 | 0.896 | 0.876 | 0.857 |

*a*) Aproxima el valor de la viscosidad a $18.3°$ $C$ utilizando un polinomio de interpolación cuadrático. Justifica la elección de los nodos utilizados.

*b*) Aproxima el valor de la viscosidad a $22.5°$ $C$ utilizando un polinomio de interpolación cúbico.

*c*) Determinar a qué temperatura la viscosidad será $\nu = 0.9$ $m^2 \cdot s^{-1}$ utilizando un polinomio cúbico obtenido mediante interpolación inversa.