Tema 1 Resolución de ecuaciones no lineales

Sea $\{p_n\}$ una sucesión de números reales que converge a $p \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = p$.

- Error absoluto: $|p - p_n|$.
- Error relativo: $\left|\dfrac{p-p_n}{p}\right|, \quad p \neq 0$

Sea $\{p_n\}$ una sucesión de números reales generada mediante un método iterativo.

- Error absoluto entre iteraciones consecutivas o error absoluto estimado: $|p_n - p_{n-1}|$.
- Error relativo entre iteraciones consecutivas o error relativo estimado: $\left|\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_n}\right|, \quad p_n \neq 0.$

Localización y separación de raíces

1. Determinar, gráfica y analíticamente, cuántas soluciones reales tienen las siguientes ecuaciones y separarlas:

   a) $x^3 + 6x^2 - 12x + 1 = 0$

   b) $e^{-x} - \ln(x+1) = 0$

Método de la bisección

2. La sucesión generada al aplicar el método de la bisección a $f(x) = (x - 3/2)x^2(x+1)(x+2)^3$ en el intervalo $[-3, 4]$ ¿A qué raíz de f converge?

3. Dada la ecuación $4x^2 - 1 + \operatorname{sen} x = 0$, se pide:

   a) Comprobar que tiene dos raíces reales y separarlas.

   b) Aplicar el método de la bisección para aproximar la menor de las raíces con un error absoluto inferior a 0.05.

4. *a*) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua que tiene una única raíz, p, en $[a, b]$ y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

      1) Describir el método de la bisección.

      2) Demostrar que la sucesión $\{p_n\}_{n=0}^{+\infty}$ generada por el método de la bisección cumple la desigualdad:

      $$|p - p_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

   b) Se quiere aplicar el método de la bisección para aproximar las raíces de la función $f(x) = \cosh(x-2)-3-\ln x$. Determinar, para cada una de las raíces, un intervalo en el que se pueda aplicar el método y el número de iteraciones que deberían realizarse para que el error absoluto cometido sea inferior a una diezmilésima.

5. Las gráficas de $f_1(x) = x^2 + 4 + \dfrac{1}{x}$ y $f_2(x) = \dfrac{2}{x^2}$ tienen un punto de intersección en el intervalo $(0, 2)$. Aplicar el método de la bisección para aproximar la abscisa de dicho punto con un error relativo entre iteraciones consecutivas inferior a cinco centésimas.

6. **Método de la falsa posición o regula falsi**. Se basa al igual que el método de la bisección en el teorema de Bolzano. Lo que varía es la estrategia a utilizar para determinar p_i.

   Sea f continua en el intervalo $[a_0, b_0]$ con $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Se elige p_0 como el punto de intersección con el eje OX de la recta que une $(a_0, f(a_0))$ con $(b_0, f(b_0))$. Se estudia si la raíz se encuentra en $[a_0, p_0]$ o $[p_0, b_0]$. Se toma dicho subintervalo como $[a_1, b_1]$ y se vuelve a aplicar el mismo proceso.

Al contrario que en el método de la bisección, la amplitud de los subintervalos no tiende necesariamente a cero cuando n tiende a infinito. No obstante, puede demostrarse que este método converge, es decir, $\lim_{n\to+\infty} p_n = p$ $(f(p) = 0)$.

a) Escribir el esquema del método de la falsa posición.

b) Sea $f(x) = 2x + \cos(x)$.

1) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz real y determinar un intervalo de longitud uno que la contenga.
2) En el intervalo de longitud uno que contiene a la raíz, aplicar el método de la bisección para aproximar la raíz de $f(x) = 0$ con un error absoluto inferior a 0.075.
3) En el intervalo de longitud uno que contiene a la raíz, calcular p_0 y p_1 aplicando el método de la falsa posición.

Iteración de punto fijo

7. En cada uno de los siguientes casos, dibujar la gráfica de $g(x)$, la recta $y = x$ y el punto fijo dado P en un mismo sistema de coordenadas. Usando el valor inicial dado p_0, calcular p_1 y p_2 por el método del punto fijo.

Representar gráficamente el método utilizado para obtener estos valores y basándose en el dibujo, determinar geométricamente si la iteración de punto fijo converge.

a) $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}, \quad P = 2, \quad p_0 = 4$

b) $g(x) = \dfrac{x^2}{3}, \quad P = 3, \quad p_0 = 3.5$

c) $g(x) = \dfrac{x^2}{3}, \quad P = 3, \quad p_0 = 2.9$

8. Sea $g(x) = \dfrac{2x + \cos^2 x}{3}$.

a) Comprobar que g verifica las condiciones del teorema de existencia y unicidad del punto fijo en el intervalo $[0, 1]$.

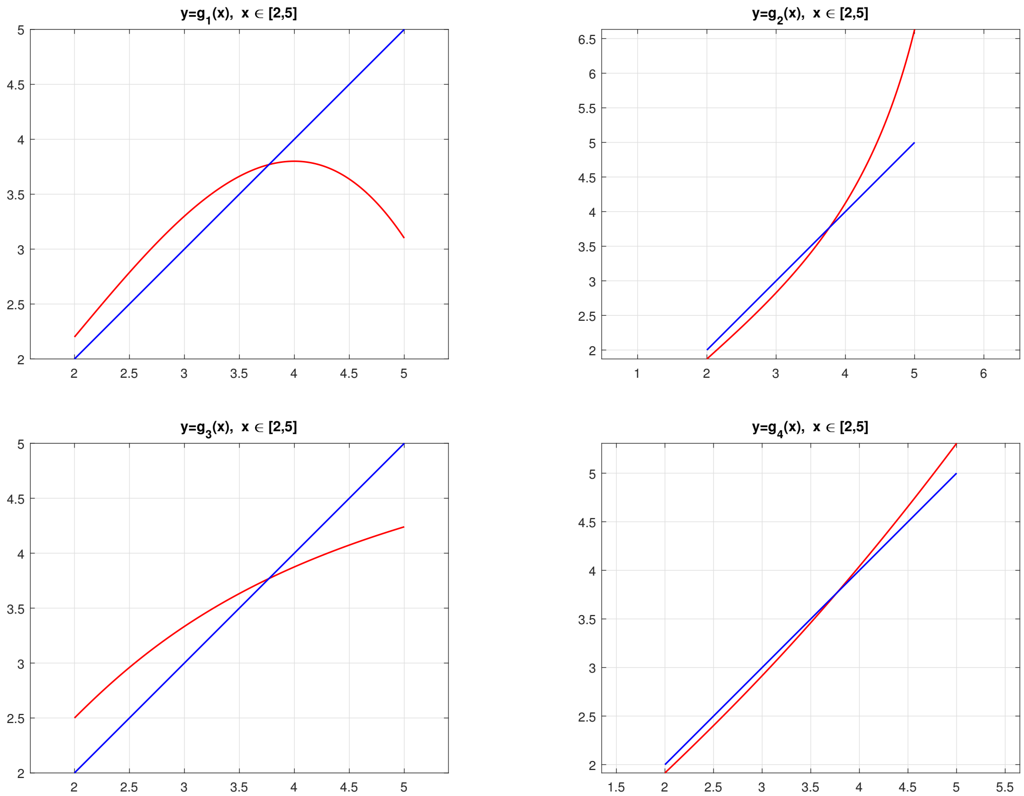
b) Utilizar la iteración de punto fijo para calcular p_1 y p_2 si $p_0 = \dfrac{1}{4}$.

c) Calcular una cota del error cometido si se toma como aproximación del punto fijo, p, el valor de p_8, siendo $p_0 = \dfrac{1}{4}$.

9. Para aproximar la única raíz real de $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 6$ en el intervalo $[3, 4]$ se pueden probar diferentes funciones de iteración, por ejemplo:

1) $g_1(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2 + 6}{10}$ 2) $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{10x - 6}{6 - x}}$

3) $g_3(x) = 6 - \dfrac{10x - 6}{x^2}$ 4) $g_4(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 + 10x - 6}{6}}$



a) Utilizando el ordenador y partiendo de $p_0 = 4$ calcular, si es posible, las veinte primeras iteraciones para cada una de las funciones g_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

b) A la vista de los resultados obtenidos y de las gráficas dadas, ¿en qué casos la iteración de punto fijo es convergente?

c) En los casos en los que el método es convergente, la convergencia ¿es igual de rápida? ¿a qué dirías que se debe la diferencia?

10. Las raíces de la ecuación $e^x = 2x + 1$ son los puntos fijos de las funciones $g_1(x) = \dfrac{e^x - 1}{2}$ y $g_2(x) = \ln(2x + 1)$.

a) ¿Puede utilizarse g_1 como función de iteración de punto fijo para aproximar la solución de la ecuación que está en el intervalo $[1, 2]$?

b) Comprobar que en el intervalo $[1, 2]$, g_2 cumple las condiciones de existencia y unicidad del punto fijo. ¿Qué implicaciones tiene esto con respecto a la convergencia?

c) Utilizando el ordenador, aproximar la solución de la ecuación $e^x = 2x + 1$ que está en el intervalo $[1, 2]$ mediante la iteración de punto fijo. El error absoluto cometido debe ser inferior a $\dfrac{1}{2}10^{-4}$.

11. Dada la función $g(x) = x + \operatorname{sen}(x)$, se pide:

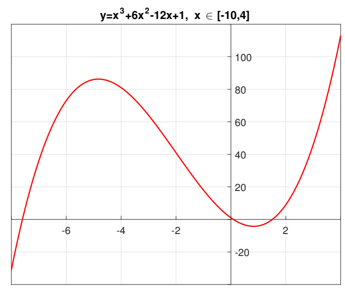
a) Comprobar que la función g tiene un único punto fijo en el intervalo $[2.5, 3.5]$.

b) Utilizar la iteración de punto fijo para aproximar el punto fijo de g con un error relativo entre aproximaciones consecutivas inferior a 10^{-6}.

c) ¿Qué número se aproxima?

Los métodos de Newton-Raphson y de la secante

12. La función $f(x) = x^3 + 6x^2 - 12x + 1$ tiene tres raíces reales. Se aplica el método de Newton-Raphson con $p_0 = -4$, ¿qué raíz se aproxima?



13.
   a) Comprobar que el polinomio $p(x) = 0.0074x^4 - 0.284x^3 + 3.355x^2 - 12.183x + 5$ tiene una raíz en el intervalo $I = [15, 18]$.
   b) Utilizar MATLAB para representar gráficamente el polinomio y determinar cuántas raíces reales tiene.
   c) De los siguientes datos iniciales: $p_0 = 16.15$, $p_0 = 16.2$, $p_0 = 16.4$, $p_0 = 16.5$ y $p_0 = 16.7$, ¿cuál escogerías para aproximar la raíz de p que está en el intervalo $[15, 18]$ aplicando el método de Newton-Raphson?
   d) Utilizar MATLAB para aplicar el método de Newton-Raphson con el dato inicial escogido. ¿Se aproxima la raíz que está en I?
   e) Utilizar MATLAB y el método de Newton-Raphson con todos los datos iniciales propuestos en el segundo apartado. Analizar los resultados.

14. Dada la ecuación $x^2 - 8x + 4 - \ln(x + 2) = 0$, se pide:
   a) Determinar el número de soluciones reales y separarlas.
   b) Escribir el esquema del método de Newton-Raphson para aproximar las soluciones e indicar datos iniciales que garanticen la convergencia del método.
   c) Utilizar el ordenador para aproximar las raíces con un error absoluto entre iteraciones consecutivas inferior a 10^{-4}.
   d) Escribir el esquema del método de la secante para aproximar las soluciones y aplicarlo para aproximar la mayor de las soluciones con un error absoluto entre iteraciones consecutivas inferior a 10^{-2}.

15. Sea $f(x) = 4 - e^x + \cos x$.
   a) Probar, gráfica y analíticamente, que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz real y determinar un intervalo de longitud uno donde se encuentra.
   b) Aplicar el método de la secante para aproximar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ considerando p_0 y p_1 los extremos izquierdo y derecho, respectivamente, del intervalo determinado en el apartado anterior. Obtener una aproximación p_n tal que el error relativo entre aproximaciones consecutivas sea inferior a 0.1.
   c) Para hallar la raíz de la ecuación $4 - e^x + \cos x = 0$ se puede tomar como función de iteración $g(x) = \ln(4 + \cos x)$.
      1) Probar que g verifica las condiciones del teorema de existencia y unicidad del punto fijo en el intervalo $[1, 2]$.
      2) Utilizar la iteración de punto fijo con $p_0 = 1.5$ y obtener una aproximación, p_n, del punto fijo tal que el error absoluto cometido sea inferior a 0.05.

16. Sea $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
   a) Plantear una ecuación que permita determinar la abscisa del punto de la gráfica de f que está más próximo al origen de coordenadas.

b) Justificar, gráfica y analíticamente, que el problema tiene una única solución y determinar un intervalo acotado que la contenga.

c) Escribir el esquema del método de Newton-Raphson para aproximar la solución y calcular dos iteraciones tomando como dato inicial $p_0 = 0.5$.

d) Comprobar que la ecuación obtenida en el primer apartado es equivalente a la ecuación $x = e^{-x^2}$ y que la iteración de punto fijo es convergente para cualquier punto inicial, p_0, del intervalo $[0.25, 1]$.

e) Si se aplica la iteración de punto fijo con $p_0 = 0.5$, determinar el número de iteraciones que deben realizarse para aproximar la solución con un error absoluto inferior a una milésima.

17. La siguiente función llamada **secante** permite aproximar la raíz de una ecuación no lineal utilizando el método de la secante.

```
function [p,y,err_rel]=secante(f,p0,p1,max)
%-------------Método de la secante ---------------------
% Aproximación a una raíz de f(x)=0 a partir de los valores iniciales p0 y p1 utilizando
% el método de la secante.
%
% Argumentos de entrada:
%    1) f es la función
%    2) p0 y p1 son las aproximaciones iniciales al cero de f(x)=0.
%    3) max es el número máximo de iteraciones.
%
% Argumentos de salida:
%    1) p es sucesión de las aproximaciones obtenidas.
%    2) y es la sucesión de los valores de la función en las aproximaciones.
%    3) err_rel son los errores relativos entre aproximaciones consecutivas.
%
p(1)=p0; p(2)=p1;
y(1)=f(p(1)); y(2)=f(p(2));

err_rel(1)=1; err_rel(2)=abs(p(2)-p(1))/(abs(p(2))+eps);

k=2;
 while (k <= max) && (err_rel(k) > 10^(-2))
   p(k+1)=p(k)-(f(p(k))*(p(k)-p(k-1)))./(f(p(k))-f(p(k-1)));
   err=abs(p(k+1)-p(k));
   err_rel(k+1)=err/(abs(p(k+1))+eps);
   y(k+1)=f(p(k+1));
   k=k+1;
end % Fin del cálculo de aproximaciones

end % Fin de la función secante
```

a) ¿Proporciona la función **secante** una aproximación de la raíz con error relativo entre aproximaciones consecutivas inferior a 10^{-6}? Justificar la respuesta.

b) Si se ha contestado negativamente a la pregunta anterior, ¿qué instrucción debería modificarse para obtener una aproximación con error relativo entre aproximaciones consecutivas inferior a 10^{-6}?

c) Se quiere disponer de una función que implemente el método de la secante pero donde el usuario especifique la cota para el error relativo entre aproximaciones consecutivas. ¿Cómo podría modificarse la función del enunciado para implementar esta especificación?

d) La ecuación $e^x - 3x^2 = 0$, tiene tres raíces reales en los intervalos $[-1, 0]$, $[0, 1]$ y $[1, 4]$. En MATLAB se define la función **f** de la ecuación ($f(x) = e^x - 3x^2$). A continuación se detallan las sentencias del programa MATLAB utilizado para aproximar la raíz y su ejecución.

Sentencias

```
p0=1;
p1=4;
max=10;

[p,y,err_rel]=secante(f,p0,p1,max);

A=[p', y', err_rel'];
disp(A)
```

Ejecución

```
1.0000   -0.2817   1.0000
4.0000    6.5982   0.7500
1.1228   -0.7088   2.5624
1.4019   -1.8332   0.1991
0.9469   -0.1122   0.4805
0.9173   -0.0217   0.0324
0.9102   -0.0005   0.0078
```

¿Qué se puede decir de la ejecución obtenida?

- ¿Se aproxima la raíz de la ecuación del intervalo $[1, 4]$?
- En la sucesión generada, determinar los valores de: p_5, $\quad \dfrac{|p_4 - p_3|}{|p_4|}$, $\quad f(p_6)$.

Aplicaciones

18. El inverso de un número real $a \neq 0$ es la raíz de la ecuación $f(x) = a - \dfrac{1}{x} = 0$.

    a) Obtener la función de iteración de Newton-Raphson para f. Simplificar la expresión obtenida para comprobar que el método permite aproximar el inverso de un número real sin realizar ninguna división.

    b) Escribir el esquema de Newton-Raphson para aproximar el inverso de $a = 3$ y, tomando un valor inicial apropiado, calcular dos iteraciones.

19. Para aproximar las raíces $m-$ésimas de un número a utilizando operaciones elementales $(+, -, *, /)$, se puede resolver la ecuación $x^m - a = 0$ mediante el método de Newton-Raphson. Utilizando MATLAB:

    a) Crear un fichero de función, de nombre `newton.m` que implemente el método de Newton-Raphson. Los argumentos de entrada deben ser: f (la función cuya raíz se quiere aproximar), df (la derivada de f), p_0 (la aproximación inicial), *delta* (la cota del error relativo entre iteraciones consecutivas), *max* (el número máximo de iteraciones que se calculan). Los argumentos de salida serán: p (vector que contiene las aproximaciones), y (vector con el valor de la función en las aproximaciones), *err_rel* (vector con los errores relativos entre aproximaciones consecutivas).

    b) Considerar el caso $m = 2$ para aproximar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{7}$ y explicar en ambos casos qué datos iniciales pueden escogerse para que el método converja. Obtener las aproximaciones con un error relativo estimado inferior a $\dfrac{1}{2}10^{-8}$.

20. Una empresa fabrica un determinado producto químico con un coste, en euros, dado por

    $$C(x) = 1500 + 2x + 3x^{2/3} \qquad x \text{ en gramos}$$

    Suponiendo que dicho producto se vende a cinco euros el gramo, determinar, aplicando el método de Newton, el número de gramos que debe vender la empresa para que los costes igualen a los ingresos por venta.

21. La curva que describe un cable colgante, sujeto de dos torres, se llama catenaria. Si suponemos que el punto más bajo de una catenaria es el origen $(0, 0)$, entonces la ecuación de la misma es:

    $$y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right) - c$$

    Para determinar la catenaria que pasa por los puntos $(\pm a, b)$, debe resolverse la ecuación $b = c \cosh\left(\dfrac{a}{c}\right) - c$ de incógnita c.

    Hallar la catenaria que pasa por los puntos $(\pm 18.45, 10.68)$ utilizando:

    a) El método de la bisección.

    b) El método de Newton-Raphson.