UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CS. FISICAS Y MATEMATICAS
ESF/JSA/esf.

INTRODUCCION A LA MATEMATICA UNIVERSITARIA
Pauta Evaluación 2 - 520145

Problema 1: Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $y = x + k$ intersecte a la parábola $y = (x-2)^2 + 1$ en un sólo punto.

Resolvemos el sistema $y = x + k \quad \wedge \quad y = (x-2)^2 + 1$.

$$x + k = (x-2)^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x + (5-k) \qquad \textbf{(6pts.)}$$

El discriminante de la expresión es $25 - 20 + 4k = 0$.
Por tanto, $k = -\dfrac{5}{4}$ **(6 pts.)**.

Problema 2: Considere la función

$$f : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}; \qquad f(x) = \sqrt{1 + (x+2)^2} + 2$$

a) Determine el recorrido de f.

$$\begin{aligned} y \in Rec(f) &\Leftrightarrow x \geq -2 \quad \wedge \quad y = \sqrt{1 + (x+2)^2} + 2 \quad \wedge \quad y - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow |x+2| = \sqrt{(y-2)^2 - 1} \quad \wedge \quad x \geq -2 \quad \wedge \quad y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2 - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad -2 + \sqrt{(y-2)^2 - 1} \geq -2 \quad \wedge \quad y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow |y-2| \geq 1 \quad \wedge \quad y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow (y \geq 3 \quad \vee \quad y \leq 1) \quad \wedge \quad y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow y \in [3, +\infty[\end{aligned}$$

(8 pts.)

b) Estudie la inyectividad de la función.
Sean $x_1, x_2 \in [-2, +\infty[$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \sqrt{1 + (x_1+2)^2} + 2 = \sqrt{1 + (x_2+2)^2} + 2 \\ &\Rightarrow |x_1 + 2| = |x_2 + 2| \\ &\Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \quad (porque \quad x_1, x_2 \geq -2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

(8 pts.)

c) Defina la función inversa de f si ésta existe; en caso contrario, haga restricciones apropiadas y defina la función inversa de la función restringida. Justifique todas sus afirmaciones.

$$f^{-1} : [3, +\infty[\to [-2, +\infty[; \qquad f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{(x-2)^2 - 1}$$

(8 pts.)

Problema 3: Resuelva las siguientes ecuaciones para $x \in \mathbb{R}$.

a) $\dfrac{log_b(x^2)}{log_b(x^2-2)} = 2$ donde b es la base y $b = 3 - x$.

$$\begin{aligned} log_b(x^2) = 2log_b(x^2-2) &\Leftrightarrow x^2 = (x^2-2)^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = x^4 - 5x^2 + 4 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 4 \quad \vee \quad x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 2 \quad \vee \quad x \pm 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(4 pts.)}$$

Notemos que $x^2 - 2 > 0 \quad \wedge \quad 3 - x > 0 \quad \wedge \quad 3 - x \neq 1$ **(2 pts.)** .
Por tanto, la única solución es $x = -2$ **(2 pts.)**.

b) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

$$(5^x)^2 - 6(5^x) + 5 = 0 \Rightarrow 5^x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \quad \textbf{(4 pts.)}$$

Así, $5^x = 1 \quad \vee \quad 5^x = 5$.
$S = \{0, 1\}$ **(4 pts.)**

c) $sen(2x) = cos(2x), \quad x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} sen(2x) = cos(2x) &\Leftrightarrow sen^2(2x) = cos^2(2x) \\ &\Leftrightarrow sen^2(2x) - (1 - sen^2(2x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2sen^2(2x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow sen(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad sen(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \end{aligned} \qquad \textbf{(6 pts.)}$$

Comprobando las soluciones, se obtiene que $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$ son las únicas soluciones de la ecuación. **(2 pts.)**.