UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

FACULTAD DE CS. FISICAS Y MATEMATICAS

INTRODUCCION A LA MATEMATICA UNIVERSITARIA

Pauta Evaluación 1 - 520145

Problema 1:

a) Recuerde que si $S \subseteq \mathbb{R}$ entonces:

S es acotado superiormente $\Leftrightarrow (\exists b \in \mathbb{R})(\forall x \in S)(b \geq x)$.

Diga a qué equivale que S no sea acotado superiormente.

S no es acotado superiormente $\Leftrightarrow (\forall b \in \mathbb{R})(\exists x \in S)(b < x)$ **(5 pts.)**

b) Pruebe que si A, B son conjuntos, se tiene $\Big[(A \cap B^c)^c \cap B^c\Big]^c = A \cup B$

$$\begin{aligned}\Big[(A \cap B^c)^c \cap B^c\Big]^c &= \Big[(A \cap B^c)^c\Big]^c \cup (B^c)^c \\ &= (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cup B \qquad \textbf{(10 pts.)}\end{aligned}$$

Problema 2: Demuestre que para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$ se verifica:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Supongamos que $\sqrt{ab} > \dfrac{a+b}{2}$ entonces,

$$\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} > a+b \Leftrightarrow 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 < (a-b)^2$$

Por consecuencia de axioma de cuerpo sabemos que $(a-b)^2 \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, por argumento por contradicción se prueba la desigualdad.

(10 puntos)

Problema 3: Resuelva las siguientes inecuaciones para $x \in \mathbb{R}$

a) **(10 puntos)**

$$\begin{aligned}\frac{2x-5}{x-8} \geq \frac{x+5}{x+3} &\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-8} - \frac{x+5}{x+3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x+3) - (x+5)(x-8)}{(x-8)(x+3)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 25}{(x-8)(x+3)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2 + 21}{(x-8)(x+3)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \quad]-\infty, -3[\quad \cup \quad]8, +\infty[\end{aligned}$$

---

b) $\dfrac{2x}{||1-x|+2|} < 1$ **(10 pts.)**

Notemos que $|1-x|+2>0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\frac{2x}{||1-x|+2|} < 1 \Leftrightarrow 2x < |1-x|+2, x \in \mathbb{R}$$

Si $x<1$ entonces,

$$2x < 1-x+2 \Leftrightarrow 2x < 3-x \Leftrightarrow x<1$$

Así la solución es, $]-\infty, 1[$

Si $x>1$ entonces,

$$2x < x-1+2 \Leftrightarrow x<1$$

Esto da como solución el conjunto vacío.

Notemos que si $x=1$ la inecuación es falsa. Luego, la solución final del ejercicio es,

$$S = \quad]-\infty, 1[\quad \cup \quad \emptyset \quad =]-\infty, 1[$$

---

c) $2-\sqrt{x+3} < \sqrt{x+1}$ **(15 puntos)**

$$x+3 \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \qquad \textbf{(3 pts.)}$$

$$\begin{aligned} 2-\sqrt{x+3} < \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow 2 < \sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}, \quad x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow 4 < x+1+2\sqrt{(x+1)(x+3)}+x+3, \quad x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow -x < \sqrt{(x+1)(x+3)}, x \geq -1 \end{aligned}$$

Si $x \geq 0 \wedge x \geq -1$, entonces $-x \leq 0$ y la desigualdad es verdadera.

Si $x \leq 0$, entonces $-x \geq 0$

$$-x < \sqrt{(x+1)(x+3)} \Leftrightarrow x^2 < x^2+4x+3 \Leftrightarrow x > -3/4$$

Así, la solución final de la inecuación

$$[0,+\infty[\quad \cup \quad]-3/4, 0] =]-3/4, +\infty[\qquad \textbf{(1 pto.)}$$