UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

**PAUTA EVAL-2 IMU (520145)** **MA/25/0CT72011**

1a)

i) $n=1:\quad a^n = a^1 < b^1 = b^n$ $(v)$ por hipótesis $a<b$

ii) Se debe probar: con $0 < a < b$ si $a^b < b^k$ entonces $a^{k+1} < b^{k+1}$

Dem $a^{k+1} = a^k \,.\, a < b^k \cdot a$ por hipótesis $a^k < b^k$

$\therefore a^{k+1} < b^k \cdot a < b^k \cdot b$ por hipótesis $a<b$

$\therefore a^{k+1} < b^{k+1}$

$$\therefore \forall a,b \in IR^+ : \ a<b \Rightarrow a^n < b^n, \quad \forall n \in IN$$

1b) Supongamos que el término existe y ocupa el lugar k

$$\therefore t_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} = \binom{n}{k-1} \left(x^2\right)^{n+1-k} \left(\frac{-2}{x}\right)^{k-1}$$

$$t_k = (-2)^{k-1} \binom{n}{k-1} x^{2n+3-3k}$$

El término es independiente de *"x"* *ssi* *2n +3 -3k = 0* ssi $n = \dfrac{3(k-1)}{2}$

Ahora bien, $n \in IN$ ssi *k-1* es múltiplo de "2"

y n es el menor ssi k-1 = 2 $\therefore k=3$. En tal caso $n = \dfrac{3(k-1)}{2} = 3$

$\therefore n=3$ para que el término independiente de x exista.

2) <u>Elipse dado</u> $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ Eje mayor sobre eje y

$$\therefore b^2 = 9 \ , \ a^2 = 16$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \to c^2 = 16 - 9 = 7 \to c^2 = 7$$

Focos : $F_1(0,-c)$ , $F_2(0,+c) \Rightarrow F_1(0, -\sqrt{7})$, $F_2(0, +\sqrt{7})$

<u>Hipérbola pedida</u>

<u>Focos :</u> $F_1(0,-c)$ , $F_2(0,+c) \Rightarrow F_1(0, -4)$, $F_2(0,+4)$

$\therefore \quad c = 4$

Vértices $V_1(0,-a)$, $V_2(0,+a) \Rightarrow V_1\left(0,-\sqrt{7}\right), V_2\left(0,+\sqrt{7}\right)$

$\therefore \quad a = \sqrt{7}$

$a^2 + b^2 = c^2 \to b^2 = 16 - 7 = 9 \to b^2 = 9$

Ec. Hipérbola pedida :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{9}=1$$

3) a) $\operatorname{Rec} f=\left\{y\in IR:\ \exists\, x>1 \wedge f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}=y\right\}$

$$=\left\{y\in IR\ :\ x>1\ \wedge x^2=\frac{y}{y-1}\ \wedge\ y\neq 1\right\}$$

$$=\left\{y\in IR\ :\ x>1\ \wedge |x|=\sqrt{\frac{y}{y-1}}\ \wedge\ \frac{y}{y-1}\geq 0\ \wedge y\neq 1\right\}$$

$$=\left\{y\in IR\ :\ \sqrt{\frac{y}{y-1}}>1\ \wedge (y\leq 0\ \vee y>1)\ \wedge\ y\neq 1\right\}$$

$$=\left\{y\in IR\ :\ \frac{y}{y-1}>1\quad \wedge\quad (y\leq 0\ \vee y>1)\right\}$$

$$=\left\{y\in IR\ :\ \frac{1}{y-1}>0\quad \wedge\ (\ y\leq\ 0\ \vee y>1\right\}$$

$$=\ \{\,y\in IR\ :\ y-1>0\quad \wedge\ \ (y\leq 0\ \vee y>1\}$$

$$=\ \{\,y\in IR\ :\ y>1\ \ \}=\ ]1,+\infty[$$

b) Sobreyectividad : $\operatorname{Rec}\ f=\,]1,+\infty[\,\neq IR=Cod\ f$

$\therefore\ f$ No es sobreyectiva

$f$ No biyectiva

c) Restricción $\bar{f}:\ ]1,+\infty[\to]1,+\infty[,\qquad \bar{f}(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Inyectividad $\forall a>1,\, b>1:\quad \bar{f}(a)=\bar{f}(b)\Rightarrow \dfrac{a^2}{a^2-1}=\dfrac{b^2}{b^2-1}$

$\Rightarrow a^2\,b^2-a^2\ =a^2\,b^2-b^2\Rightarrow a^2\ =b^2\Rightarrow\ |a|=|b|$

$\Rightarrow a=b$ pues $a>0,\ b>0$

$\therefore \bar{f}$ es inyectiva

y como $\operatorname{Rec}(\bar{f})=\,]1,+\infty[$ para $Dom(\bar{f})=\,]1,+\infty[$

$\therefore \bar{f}$ es biyectiva $\quad \bar{f}:\ ]1,+\infty[\to]1,+\infty[,\ \ \bar{f}(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

Inversa

Ecuación : $\quad \bar{f}(x)=y\quad\Rightarrow\ x=\sqrt{\dfrac{y}{y-1}}=\bar{f}(y)$

$$\therefore\ \bar{f}^{-1}:\ ]\,1,+\infty[\to\ ]1,+\infty[\quad ;\quad \bar{f}(y)=\sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

JLSA/aoa