UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Solución a evaluación 1

Introducción a la Matemática Universitaria - 520145

1) (10P) Sean p, q y r proposiciones lógicas. Demuestre que

$$[p \to (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r] .$$

Solución:

Variante 1:

$$\begin{aligned}(p \to q \vee r) &\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r),\\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee r,\\ &\Leftrightarrow (\sim p \vee \sim (\sim q)) \vee r,\\ &\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee r,\\ &\Leftrightarrow p \wedge \sim q \to r.\end{aligned}$$

Variante 2:
La propiedad a probar es equivalente a probar que la proposición $[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r]$ es tautología. Para verificarlo, construyamos la tabla de verdad asociada a ella.

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \to r$	$[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \to r]$
V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

En la tabla anterior se observa que la proposición a analizar es V para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones que la forman. Esto significa que ella es tautología.

2) (15P) Considere las siguientes proposiciones lógicas

$$\mathbf{p} : \exists x \in \mathbb{R} \,:\, \forall y \in \mathbb{R} \,:\, x + y = 1 \qquad \mathbf{q} : \forall x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R} \,:\, x + y = 1.$$

2.1) Escriba la negación de $\mathbf{p}$.

2.2) Determine los valores de verdad de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. Justifique sus respuestas.

Solución:

2.1) $\sim \mathbf{p} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \,:\, \exists y \in \mathbb{R} \,:\, x + y \neq 1$ **(5P)**

2.2) La proposición **p** es falsa. Para justificarlo, veamos que $\sim$ **p** es verdadera. Dado un $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$, por ejemplo, $y = 2 - x$, tal que $x + y = x + (2 - x) = 2 \neq 1$. **(6P)**
La proposición **q** es verdadera. Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe $y \in \mathbb{R}$, por ejemplo, $y = 1 - x$ tal que $x + y = x + (1 - x) = 1$. **(4P)**

3) (15P) Sean A y B conjuntos cualesquiera. Demuestre que $A - (A - B) = A \cap B$.
Solución:

Variante 1:

$$
\begin{aligned}
A - (A - B) &= A - (A \cap B^c), && \text{porque } A - B = A \cap B^c \text{ para cualquier par de conjuntos } A, B\\
&= A \cap (A \cap B^c)^c, && \text{usando misma propiedad anterior}\\
&= A \cap (A^c \cup B), && \text{por Morgan y porque para todo conjunto } A \text{ se cumple que } (A^c)^c = A\\
&= (A \cap A^c) \cup (A \cap B), && \text{por distributividad}\\
&= \emptyset \cup (A \cap B), && \text{para cualquier conjunto } A \text{ se cumple que } A \cap A^c = \emptyset\\
&= A \cap B, && \text{porque la unión del conjunto vacío con cualquier conjunto } A \text{ es } A.
\end{aligned}
$$

Variante 2:
Si $\mathcal{U}$ denota al conjunto universo, debemos probar que $\forall\, x \in \mathcal{U}$ se cumple

$$x \in A - (A - B) \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cap B.$$

$$
\begin{aligned}
x \in A - (A - B) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \sim (x \in A - B), && \text{por definición de diferencia entre conjuntos}\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \sim (x \in A \wedge x \notin B), && \text{usando misma propiedad anterior}\\
&\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin A) \vee x \in B), && \text{por Morgan}\\
&\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin A)) \vee (x \in A \wedge x \in B), && \text{por distributividad}\\
&\Leftrightarrow F \vee (x \in A \wedge x \in B), && \text{porque } p \wedge \sim p \Leftrightarrow F\\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, && \text{porque } p \vee F \Leftrightarrow p,\\
&\Leftrightarrow x \in A \cap B, && \text{por definición de intersección entre conjuntos}
\end{aligned}
$$

4) (20P) Determine para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes desigualdades

4.1 $\dfrac{x}{1-x} > x$, **4.2** $|x - 2| \geq 3 - x$.

Solución:

4.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} > x &\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} - x > 0,\\
&\Leftrightarrow \frac{x - x(1-x)}{1-x} > 0,\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x} > 0
\end{aligned}
$$

Dado que para cualquier $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ se cumple que $x^2 > 0$, la desigualdad anterior es cierta si $x \neq 0$ y $1 - x > 0$, es decir, si $x \neq 0$ y $x < 1$. El conjunto solución de esta inecuación es, por tanto,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < 1 \wedge x \neq 0\} =]-\infty, 1[- \{0\}.$$

4.2) Variante 1:
Si $x-2 \geq 0$, la inecuación dada es equivalente a

$$x-2 \geq 3-x \Leftrightarrow 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

Es decir, todo $x \geq \frac{5}{2}$ satisface $|x-2| \geq 3-x$.
Si $x-2<0$, la inecuación dada es equivalente a

$$2-x \geq 3-x \Leftrightarrow 2 \geq 3$$

lo cual es falso, por tanto, ningún $x<2$ satisface la inecuación.
El conjunto solución de la inecuación dada es entonces

$$S=\left\{x \in \mathbb{R} \;:\; x \geq \frac{5}{2}\right\}=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[.$$

Variante 2:
Dado que para cualquier número real x se cumple que $|x| \geq 0$, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $3-x<0$ son solución de la inecuación dada.
Analicemos para qué valores de $x \in \mathbb{R} \;:\; x \leq 3$ se cumple que $|x-2| \geq 3-x$, para estos valores se tiene que

$$|x-2| \geq 3-x \Leftrightarrow (x-2 \geq 3-x) \vee (x-2 \leq x-3) \Leftrightarrow \left(x \geq \frac{5}{2}\right) \vee (-2 \leq -3) \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2},$$

por tanto,

$$S=]3,+\infty[\cup\left(]-\infty, 3] \cap\left[\frac{5}{2},+\infty\right[\right)=\left[\frac{5}{2},+\infty\right[.$$