UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

Pauta Evaluación 3

Introducción a la Matemática Universitaria - 520145
25 de mayo de 2015

1) (15 puntos)
Obtenga el conjunto solución de

1.1) $6^x + 9^x = 2^{2x+1}$

Solución:

Se tiene que

$$\begin{aligned} 6^x + 9^x = 2^{2x+1} &\Leftrightarrow 6^x + 9^x = 2 \cdot 4^x && (1)\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 = 2 && (2)\end{aligned}$$

Haciendo $u = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ en (2), obtenemos la ecuación auxiliar

$$u^2 + u - 2 = 0,$$

cuyas soluciones son $u = 1$ y $u = -2$ (**5 puntos**).

Deshaciendo la sustitución, tenemos que:

- Si $u = 1$, entonces $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$, por lo que $x = 0$.
- Si $u = -2$, entonces $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -2$, lo cual no tiene solución, dado que $\left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{0\}$ (**3 puntos**).

1.2) $\ln(\sin x) \leq 0,\ x \in]0, 2\pi[$.

Solución:
Se tiene que

$$\begin{aligned} \ln(\sin x) \leq 0 &\Leftrightarrow 0 < \sin x \ \wedge\ \sin x \leq 1\\ &\Leftrightarrow 0 < x < \pi \ \wedge\ x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

De este modo, $S =]0, \pi[$ (**7 puntos**).

2) (15 puntos)
Considere la función f definida por

$$\begin{aligned} f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \cos^2 x \end{aligned}$$

Obtenga, si es que existe, la función inversa de f. En caso contrario, haga las restricciones necesarias para que sea invertible y defina su inversa.

Solución:
La función f tiene inversa si, y sólo si, es biyectiva.

- Inyectividad:

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \cos^2 x_1 = \cos^2 x_2 && (3) \\ &\Rightarrow |\cos x_1| = |\cos x_2| && (4) \\ &\Rightarrow \cos x_1 = \cos x_2 && (5) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 && (6) \end{aligned}$$

  donde (5) y (6) vienen del hecho que la función coseno es no negativa e inyectiva en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente. De este modo, f es inyectiva (**5 puntos**).

- Sobreyectividad:
  Tenemos que

$$\begin{aligned} Recf &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ con } y = \cos^2 x\right\} && (7) \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ con } |\cos x| = \sqrt{y}\right\} && (8) \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ con } \cos x = \sqrt{y}\right\} && (9) \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ con } x = \arccos(\sqrt{y})\right\} && (10) \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \ \wedge \ \sqrt{y} \leq 1\} && (11) \\ &= [0, 1] && (12) \end{aligned}$$

  donde (9) viene del hecho que la función coseno es no negativa en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Como $Rec\ f \neq Cod\ f$, entonces f no es sobreyectiva, por lo que no posee inversa (**5 puntos**). Sin embargo, si $Cod\ f = [0, 1]$, entonces f es sobreyectiva

De este modo,

$$\begin{aligned} f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to [0,1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos^2 x \end{aligned}$$

es biyectiva, y así existe f^{-1}, la cual está definida como

$$\begin{aligned} f^{-1} : [0,1] &\to \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \arccos(\sqrt{x}) \end{aligned}$$

(**5 puntos**)

3) (15 puntos)
Considere la función f definida por

$$\begin{aligned} f : Dom f \subseteq \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sqrt{\ln x} \end{aligned}$$

Defina, si es que existe, $f \circ f$.

Solución:

Note que

$$\begin{aligned} Dom f &= \{x \in \mathbb{R} : \ln x \geq 0 \ \wedge \ x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ \wedge \ x > 0\} \\ &= [1, +\infty[\, . \end{aligned}$$

(**3 puntos**)
Sea A tal que

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x \in Dom f \ \wedge \ f(x) \in Dom f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ \wedge \sqrt{\ln x} \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ \wedge \ln x \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \ \wedge x \geq e\} \\ &= [e, +\infty[\end{aligned}$$

(**5 puntos**)

Como $A \neq \emptyset$, entonces $f \circ f$ existe y $Dom(f \circ f) = [e, +\infty[$. Además, si $x \in [e, +\infty[$, entonces

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{\ln x}) = \sqrt{\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)}$$

(**5 puntos**).

De este modo, la función $f \circ f$ queda definida como

$$\begin{aligned} f \circ f : [e, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \circ f)(x) = \sqrt{\ln\left(\sqrt{\ln x}\right)}. \end{aligned}$$

(**2 puntos**)

4) (15 puntos)
La temperatura $T(t)$ de una persona a las t horas de haber fallecido, viene dada por

$$T(t) = ce^{kt} + 16 \tag{13}$$

donde c, k son constantes por determinar.

Al momento de fallecer, la temperatura de esta persona era de $28°C$. Su cuerpo fue encontrado dos horas después, a una temperatura de $22°C$. Si la policía llegó cuando la temperatura del cuerpo era de $19°C$, ¿cuánto tiempo después de ser encontrado el cuerpo, llegó la policía?

Solución:
Datos:

$$T(0) = 28 \tag{14}$$
$$T(2) = 22 \tag{15}$$

De (13) y (14),

$$c + 16 = 28 \Leftrightarrow c = 12.$$

(**3 puntos**)

Reemplazando c en (13), obtenemos

$$T(t) = 12e^{kt} + 16 \tag{16}$$

De (15) y (16),

$$\begin{aligned}12e^{2k}+16=22 &\Leftrightarrow e^{2k}=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow 2k=\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\ &\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

(**5 puntos**)

Reemplazando k en (16), obtenemos

$$T(t)=12e^{\frac{t}{2}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right)}+16 \Leftrightarrow T(t)=12e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}}+16 \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow T(t)=12\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}+16 \tag{18}$$

(**2 puntos**)

Usando (18), resolvemos la ecuación $T(t)=19$:

$$\begin{aligned}T(t)=19 &\Leftrightarrow 12\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}+16=19\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{t}{2}=2 \Leftrightarrow t=4\end{aligned}$$

De este modo, la policía llegó 4 horas después de fallecido el individuo, es decir, 2 horas después de que fue encontrado el cuerpo (**5 puntos**).